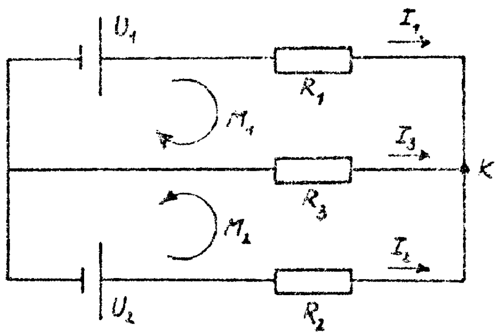
Univ.Doz. Dr. Rudolf Taschner
Theresianische Akademie, Wien

MATHEMATIK IN DER 5. KLASSE AHS

Was, sehr geehrte Damen und Herren, bewog mich gerade den Mathematikunterricht in der 5. Klasse der allgemeinbildenden höheren Schule zum Thema meines Vortrages zu wählen? Sicher nicht allein die persönlichen Erfahrungen in dem ersten Mathematikjahr der Oberstufe, obwohl diese eigenartig genug waren – gehörte ich doch dem Jahrgang an, der zum ersten Mal die Vorzüge der sogenannten modernen Mathematik unter dem Schlagwort „Mengenlehre" erfahren durfte – sondern vielmehr die Überzeugung, daß der Unterricht in der fünften Klasse die sich im späteren Leben kaum mehr ändernde Einstellung der jungen Menschen zum Gegenstand Mathematik in der Oberstufe entscheidend formt. Unterscheidet sich doch der Mathematikunterricht der Unterstufe wesentlich von dem der Oberstufe!

Nach außen hin zeigt sich diese Zäsur meist in der Verwendung von neuen Lehrbüchern andersartigen Formats und in einem recht häufigen Wechsel der Lehrkraft; inhaltlich in einer neuartigen Erfassung des Begriffes „Mathematik". Hat die Mathematik in der 4. Klasse mit kaufmännischen Kalkulationen und einfachen Rechnungen des Bankwesens, mit Proportionen und dem Strahlensatz, mit der Geometrie räumlicher Gebilde und der Konstruktion von Kegelschnittlinien einen unmittelbar einsichtigen Bezug zur Wirklichkeit und ihrer konstruktiven Bewältigung, so verliert sich dieser Bezug in der Oberstufe oft hinter den in den Vordergrund tretenden abstrakten Strukturen und der Betonung des Modellcharakters der Mathematik. Die Anwendung mathematischer Modelle auf die Wirklichkeit scheint in der Oberstufe zurecht sehr oft gekünstelt. Gerade dem Lehrer der 5. Klasse fällt es sehr schwer, den Schülern den Wirklichkeitsbezug bei cartesischen Mengenprodukten und Relationen, bei algebraischen Verknüpfungsgebilden oder der Bijektivität von Funktionen zu verdeutlichen. Deshalb möchte ich im folgenden an einigen Stoffgebieten aus dem Lehrplan der 5. Klasse den Sinnbezug aufzeigen.

Das zentrale Thema der 5. Klasse ist – nach meiner Meinung – die Darstellung und Bewältigung linearer Gleichungssysteme. Dies deshalb, weil erstens das gaußsche Eliminationsverfahren ein Algorithmus ist, der das keineswegs banale Problem, ein lineares Gleichungssystem zu lösen, umfassend bewältigt; weil zweitens sowohl die im Lehrplan vorgesehene Gruppentheorie als auch die im Lehrplan enthaltene analytische Geometrie organisch aus der Theorie linearer Gleichungssysteme erwächst; weil drittens Studierende aller technischen Berufe, der überkommenen und der modernen, lineare Gleichungssysteme beherrschen müssen und weil viertens diese Theorie unmittelbar einsichtige Anwendungen besitzt. Diese vier Begründungen seien am Beispiel eines elektrischen Netzwerkes veranschaulicht:



Nach der (in der 4. Klasse bereits gelehrten) kirchhoffschen Maschenregel gilt für die beiden Maschen M_1, M_2:

$$R_1 I_1 - R_3 I_3 = U_1,$$
$$R_2 I_2 - R_3 I_3 = U_2,$$

und nach der kirchhoffschen Knotenregel erhält man im Knoten K:

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0.$$

Faßt man die Widerstände R_1, R_2, R_3 und die Spannungen U_1, U_2 als bekannte, die Ströme I_1, I_2, I_3 aber als unbekannte Größen auf, entsteht hieraus ein lineares Gleichungssystem, nämlich:

$$\begin{aligned} R_1 I_1 - R_3 I_3 &= U_1 \\ R_2 I_2 - R_3 I_3 &= U_2 \\ I_1 + I_2 + I_3 &= 0, \end{aligned}$$

das sich prägnanter in Matrizenform

$$\begin{bmatrix} R_1 & 0 & -R_3 \\ 0 & R_2 & -R_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

fassen läßt. Um das Gleichungssystem zu lösen, braucht man nur die Koeffizientenmatrix und die rechte Seite als „Skelett" anzuschreiben:

$$\begin{array}{ccc|c} R_1 & 0 & -R_3 & U_1 \\ 0 & R_2 & -R_3 & U_2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

und durch geeignete Zeilenoperationen dafür zu sorgen, daß die linke Seite des Skeletts zur Einheitsmatrix umgeformt wird. Zum Beispiel ergibt sich bei $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 3\Omega$, $R_3 = 6\Omega$; $U_1 = 10\text{V}$, $U_2 = 3\text{V}$ aus

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -6 & 10 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

das Skelett

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}.$$

Die Lösung für die gesuchten Ströme $I_1 = 2\text{A}$, $I_2 = -1\text{A}$, $I_3 = -1\text{A}$ steht rechts. Das gaußsche Eliminationsverfahren besteht eben in dieser Skelettumformung. Es ist so allgemein, daß eine Einschränkung auf 2X2–, 2X3–, 3X2– oder 3X3–Gleichungssysteme unverständlich bleibt. Interessierte Schüler fragen zum Beispiel, warum im obigen Gleichungssystem die Gleichung

$$R_1 I_1 - R_2 I_2 = U_1 - U_2$$

für die große Masche ausgelassen wurde. Selbstverständlich kann man sie ins Gleichungssystem mit aufnehmen:

$$\begin{bmatrix} R_1 & 0 & -R_3 \\ 0 & R_2 & -R_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ R_1 & -R_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ 0 \\ U_1 - U_2 \end{bmatrix}.$$

Zwar liegt hier ein Gleichungssystem von vier Gleichungen in drei Unbekannten vor – das dürfte man nach dem Lehrplan gar nicht durchnehmen! –; doch ist (bei Verwendung der gleichen numerischen Werte wie oben) die Lösung des Skeletts

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -6 & 10 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \\ 2 & -3 & 0 & 7 \end{array}$$

nach dem gaußschen Algorithmus nicht schwieriger als die eines 3X3–Systems

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} .$$

Das Verschwinden der letzten Zeile links und rechts weist die lineare Abhängigkeit der vier Gleichungen aus. Stünde in der letzten Zeile rechts eine von Null verschiedene Zahl, wäre das Gleichungssystem unlösbar.

Was ergäbe sich aber, wenn man bei der Analyse des Netzwerkes nur auf die Maschenregel Bezug nähme, d.h. nur das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} R_1 & 0 & -R_3 \\ 0 & R_2 & -R_3 \\ R_1 & -R_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_1 - U_2 \end{bmatrix}$$

betrachtete? Bei den gleichen numerischen Werten wie oben liefert das gaußsche Verfahren aus dem Skelett

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -6 & 10 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 2 & -3 & 0 & 7 \end{array}$$

nur

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} .$$

Rechts von der erhaltenen Einheitsmatrix verbleibt noch eine nicht mehr zu eliminierende Spalte; man kann bei der Angabe der Lösung nur die einparametrige Lösungsschar

$$\begin{aligned} I_1 &= 5\text{A} + 3I_3 \\ I_2 &= 1\text{A} + 2I_3 \end{aligned} .$$

anschreiben – physikalisch gesehen, ist das System durch diese drei Gleichungen unterbestimmt. Trotzdem führt auch hier der gaußsche Algorithmus zu einem mathematisch sinnvollen Ergebnis.

Das Beispiel verdeutlicht, daß der gaußsche Eliminationsalgorithmus ein nicht allzu schwieriges, aber dennoch ein nicht triviales – in der Sprache der Schüler: nicht langweiliges – Verfahren darstellt, das sich überdies als sehr nützlich erweist. Die Beschränkung des Lehrplans auf höchstens drei Gleichungen in drei Unbekannten erachte ist für unnötig. Es ist durchaus angebracht, bei Übungsbeispielen 4X3–, 3X4–, 4X4–Systeme oder sogar einfach gebaute größere Systeme zu studieren; der Algorithmus ist hiefür flexibel genug. (Bei Schularbeiten ist selbstverständlich Vorsicht geboten!) Der Wirklichkeitsbezug der Theorie linearer Gleichungssysteme ist für die Schüler direkt aus dem Beispiel zu ersehen.

Überdies beinhaltet dieses Beispiel für den zukünftigen Techniker bemerkenswerte Verallgemeinerungen. Ersetzt man die ohmschen Widerstände durch Spulen oder Kondensatoren, liegt ein formal analoges Gleichungssystem vor – nur treten jetzt in der Koeffizientenmatrix Differential- und Integraloperatoren auf. Ersetzt man zum Beispiel R_3 durch eine Spule mit Induktivität L erhält man:

$$\begin{bmatrix} R_1 & 0 & -L(\mathrm{d}/\mathrm{d}t) \\ 0 & R_2 & -L(\mathrm{d}/\mathrm{d}t) \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(t) \\ I_2(t) \\ I_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Sollen zum Beispiel einem Studenten der Elektrotechnik Differentialgleichungssysteme keine Schwierigkeiten bereiten, muß er gelernt haben, lineare Gleichungssysteme mit ebensolcher Leichtigkeit zu beherrschen wie ein guter Klavierspieler die Tonleitern.

Die linearen Gleichungssysteme liefern meiner Meinung nach auch das einzig sinnvolle Motiv für die Einführung des Gruppenbegriffs in der fünften Klasse. Dies sei etwas ausführlicher dargelegt.

Das vorher beschriebene Netzwerk wird mathematisch durch das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} R_1 & 0 & -R_3 \\ 0 & R_2 & -R_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dargestellt, das man in Matrizenform als verallgemeinertes ohmsches Gesetz

$$RI = U$$

abkürzen kann. Die Widerstandsmatrix R ist eine Systemgröße, während die rechts stehende Spannungsspalte U eine Störgröße darstellt. Einfacher ausgedrückt: Schließt man verschieden große Spannungsquellen $U', U'', U''', U'''', \ldots$ an das Netzwerk, fließen in ihm die Ströme $I', I'', I''', I'''', \ldots$, die sich aus den Gleichungssystemen

$$RI' = U', \qquad RI'' = U'', \qquad RI''' = U''', \qquad RI'''' = U'''', \ldots$$

mit der gleichen Koeffizientenmatrix R ergeben. Alle diese Systeme kann man in ein einziges System

$$R\begin{bmatrix} I' & I'' & I''' & I'''' & \ldots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U' & U'' & U''' & U'''' & \ldots \end{bmatrix}$$

zusammenfassen, in dem die Widerstandsmatrix R mit der aus den unbekannten Stromspalten bestehenden Matrix $\begin{bmatrix} I' & I'' & I''' & I'''' & \ldots \end{bmatrix}$ multipliziert wird. Zwingend folgt hieraus der Formalismus der Matrizenmultiplikation. Anstatt die Lösungen über das große Skelett

$$\begin{array}{ccc|ccccc} R_1 & 0 & -R_3 & U_1' & U_1'' & U_1''' & U_1'''' & \ldots \\ 0 & R_2 & -R_3 & U_2' & U_2'' & U_2''' & U_2'''' & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \end{array}$$

zu berechnen – was durchaus möglich und bei singulären Systemen auch sinnvoll ist – ist es vorteilhafter, das Skelett

$$\begin{array}{ccc|ccc} R_1 & 0 & -R_3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array},$$

dem gaußschen Verfahren entsprechend, umzuformen. Rechts ergibt sich die Leitwertmatrix R^{-1}, die inverse Matrix zu R. Die Lösungen der obigen Systeme lauten demgemäß:

$$I' = R^{-1}U', \qquad I'' = R^{-1}U'', \qquad I''' = R^{-1}U''', \qquad I'''' = R^{-1}U'''', \ldots .$$

Die Kenntnis der Matrizenmultiplikation, der Einheitsmatrix und der inversen Matrix bildet die Voraussetzung für die Einführung der Gruppe der regulären Matrizen.

Dadurch ist nicht allein ein Einstieg in die Gruppentheorie als solche möglich; diese Motivation stellt zugleich die in der Mathematik außerordentlich wichtigen Matrizengruppen zur Verfügung. Jeder Geometer weiß um die Bedeutung der Gruppe SO(3) aller orthogonalen 3X3–Matrizen mit positiver Determinante im Zusammenhang mit den Drehungen im euklidischen Anschauungsraum. Oder denken Sie an die Symmetrien der Quantenphysik! Die quantenmechanische Theorie des Drehimpulses im zentralsymmetrischen Feld ist allein durch die Darstellungen der Gruppe SO(3) bestimmt. Selbstverständlich wäre es vermessen, auf elementarem Mittelschulniveau die SO(3) einführen zu wollen. Doch kann man in der fünften Klasse die endliche zyklische Untergruppe

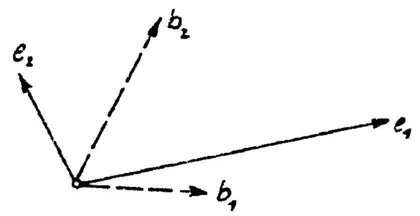
$$\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}^n \qquad n = 1,2,3,4,5,6,$$

der SO(2) und ähnlich einfache Gruppen sehr wohl behandeln, ihre Untergruppen aufsuchen und isomorphe Gruppen, aus Deckabbildungen geometrischer Figuren bestehend, vorstellen. Diese Isomorphismen führen geradewegs zu den Permutationsgruppen.

Wenn die in der fünften Klasse gebotene Gruppentheorie zu einer algebraisch verbrämten Darstellung der ganzen und der rationalen Zahlen verflacht, wenn man Primitivbeispiele wie den Nachweis, daß die natürlichen Zahlen bezüglich der Subtraktion keine Gruppe bilden, ernsthaft als Aufgabe stellt, wäre es besser, in der Schule gar nicht von Gruppen zu sprechen, sich nicht eines unnötigen Begriffsapparats zu bedienen und die Schüler vor einem öden Lernstoff zu bewahren. Matrizen– und Permutationsgruppen stellen zumindest nicht derart banale Beispiele von Gruppen dar – schon allein die im allgemeinen nicht bestehende Kommutativität belegt dies. Es ist zugegebenermaßen schwer, wenn nicht mitunter unmöglich, einem Schüler glaubhaft zu machen, daß Gruppen bedeutende mathematische Strukturen sind. Doch sollte der Schüler zumindest in einfachen Matrizen– und Permutationsgruppen einige interessante und variantenreiche Beispiele kennenlernen, die wenigstens sein ästhetisches Empfinden wecken und seinen Spieltrieb anregen.

Die Beziehungen zwischen linearen Gleichungssystemen und der analytischen Geometrie sind Ihnen so vertraut, daß ich mich auf wenige, mir wichtig scheinende Hinweise beschränken kann:

Spannen die beiden Vektoren e_1, e_2 einen zweidimensionalen Vektorraum auf und gilt dies in dem gleichen Raum analog für die beiden Vektoren b_1, b_2,



muß eine Darstellung der neuen Basis b_1, b_2

$$\begin{aligned} b_1 &= \beta_{11} e_1 + \beta_{21} e_2 \\ b_2 &= \beta_{12} e_1 + \beta_{22} e_2 \end{aligned}$$

durch die alte Basis e_1, e_2 bestehen. Die alten Koordinaten α_1, α_2 eines Vektors $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ werden durch neue Koordinaten α_1', α_2' ersetzt, bezieht man $a = \alpha_1' b_1 + \alpha_2' b_2$ auf die neue Basis. Wegen

$$a = \alpha_1'(\beta_{11} e_1 + \beta_{21} e_2) + \alpha_2'(\beta_{12} e_1 + \beta_{22} e_2) = (\alpha_1'\beta_{11} + \alpha_2'\beta_{12})e_1 + (\alpha_1'\beta_{21} + \alpha_2'\beta_{22})e_2$$

besteht das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix},$$

das den Koordinatenwechsel kennzeichnet. Mit dieser Koordinatentransformation möchte ich nicht nur die Bedeutung linearer Gleichungssysteme zur analytischen Geometrie betonen, sondern auch auf [illegible] machen, den sogar Lehrbuchautoren begehen, wenn sie Vektoren eines zweidimensionalen Vektorraumes als Spalten, bestehend aus zwei Zahlen, definieren. Denn die Frage, ob

$$a = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \end{bmatrix}$$

oder vielmehr

$$a = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

gilt, ist offensichtlich unsinnig – der Vektor a ist nämlich als solcher mit keiner der beiden Spalten identisch. Zwar stimmt es, daß die Menge $\mathbb{R}^2$ aller Spalten, bestehend aus zwei reellen Zahlen, einen Vektorraum bildet. Doch ist unbedingt bereits von allem Anfang an – das heißt ab der fünften Klasse – darauf zu verweisen, daß dies keineswegs der einzige zweidimensionale Vektorraum ist. Die Gesamtheit aller Pfeile der Ebene (mit der üblichen Gleichsetzung bei gleicher Länge, Richtung und Orientierung) bildet zum Beispiel einen vom $\mathbb{R}^2$ völlig verschiedenen Vektorraum. „Völlig verschieden" deshalb, weil der Raum $\mathbb{R}^2$ von seiner Struktur her überhaupt keinen Koordinatenwechsel zuläßt (sieht man von der identischen Transformation ab), während im affinen Raum aller Pfeile der Ebene jede reguläre 2×2–Matrix

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix}$$

als Transformationsmatrix eines Koordinatenwechsels zulässig ist. Was dieser „halbwahre" Begriff des Vektorraumes nach sich zieht, ist aus dem Lehrbuch der sechsten Klasse ersichtlich. Hier erklären dieselben Lehrbuchautoren das innere Produkt zweier Vektoren – und bei ihnen gelten ja nur Spalten als Vektoren – durch

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2$$

anstatt diese Formel aus der geometrischen Bedeutung (bzw. den axiomatischen Eigenschaften) des inneren Produkts unter Zugrundelegung einer orthonormalen Basis herzuleiten. Mit Hilfe dieser Formel könnte man den pythagoräischen Lehrsatz auch für alle schiefwinkeligen Dreiecke beweisen! Der Rettungsversuch, in einer unscheinbaren Bemerkung anzudeuten, man müsse sich bei der geometrischen Deutung des inneren Produktes auf cartesische Koordinatensysteme beschränken, bleibt wirkungslos, weil ihm die Begründung fehlt. Kein Wunder, daß der Unterschied zwischen affiner und euklidischer Geometrie durch das Gleichmachen von Vektoren und Spalten verschüttet wird. Was in der Schule noch nicht als Halbwahrheit auffällt, erweist sich aber bei einem späteren Studium als schwerwiegend. Sollen zum Beispiel Studenten ein Fundamentalsystem für den harmonischen Oszillator $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ aufstellen, verstehen nur wenige, daß es sich dabei bloß um einfachste lineare Algebra handelt, deren Grundlegung in der fünften Klasse erfolgt sein sollte. Die Lösungen bilden nämlich einen von $\cos \omega t$ und $\sin \omega t$ aufgespannten zweidimensionalen Vektorraum. Derselbe Vektorraum wird von $e^{\pm i\omega t}$ erzeugt, und der Basiswechsel ist durch die eulersche Formel

$$e^{\pm i\omega t} = \cos \omega t \pm i \sin \omega t$$

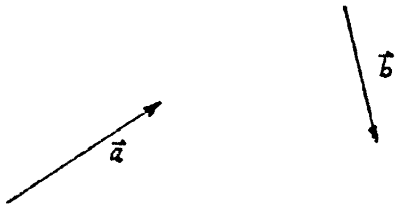
gegeben. Die Gleichheit von $\cos \omega t$ bzw. $\sin \omega t$ mit

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ist hier natürlich sinnlos.

Die verfehlte Auffassung des Vektorbegriffes läßt die genannten Lehrbuchautoren konsequenterweise auch nicht davor [illegible], Punkte als Vektoren aufzufassen – haben sie doch auch

Koordinaten – und Punkte zu addieren. Beachten Sie den Unterschied: Die Summe zweier Pfeile $\vec{a}, \vec{b}$ der Ebene



kann man ohne weiteres erklären; wie aber soll man die beiden Punkte P, Q

in der Ebene addieren? Schon dieses einfache Beispiel zeigt, zu welchen Vorstellungen ein schlecht gebrauchtes mathematisches Begriffssystem verführen kann.

In diesem kritischen Sinn sind auch andere Themen, die in Lehrbüchern der fünften Klasse behandelt werden, zu betrachten. Drei Beispiele seien noch kurz erwähnt:

Lehrinhalte, besonders jene aus dem Dunstkreis der Mengenlehre, deren Erkenntnisgewinn mit der leeren Menge selbst gleichmächtig ist, können unbeschadet über Bord geworfen werden. Zu welcher Einsicht gelangt denn ein Schüler, wenn er die Aufgabe löst, die Ungleichheit der Mengen $\{\}$ und $\{\{\}\}$ zu beweisen?

Ist es wirklich nötig, die triviale Ungleichung $2^n > n$ mit vollständiger Induktion zu beweisen? Wenn in der fünften Klasse keine vernünftigeren Beispiele zur Anwendung der vollständigen Induktion zur Verfügung stehen, ist es nicht zu verantworten, das Induktionsprinzip explizit den Schülern einzutrichtern. Implizit verwenden sie es ohnehin zum Beispiel bei der immer genauer werdenden Berechnung von $\sqrt{2}$ oder wenn sie begreifen, daß das Eliminationsverfahren – wie groß das Gleichungssystem auch sei – stets zu einem sinnvollen Abbruch führt.

Läßt es sich rechtfertigen, Relationen als solche als Lehrstoff zu behandeln? Noch dazu als Teilmengen von Mengenprodukten, wodurch sie bestenfalls ihrem Umfang nach, nicht aber inhaltlich begriffen werden. Verstehen Schüler nicht mehr von Relationen, wenn sie durch das Wissen und das Geschick des Lehrers erkennen, daß zwischen dem Anschauungsraum und dem Raum $\mathbb{R}^3$ nur eine Äquivalenzrelation modulo Koordinatentransformationen, aber keinesfalls die Relation der Gleichheit besteht?